Apéndice A

Factorización por bloques

Supongamos que mediante un algoritmo de reordenación conseguimos permutar una matriz dispersa para que tome una forma triangular inferior por bloques (fig. 3.1 (c)). En este caso, podemos factorizar cada bloque diagonal independientemente de los demás, al igual que explicábamos en la subsección 3.1.1. Si representamos la matriz triangular por bloques como se muestra en la ecuación A.1, la solución de la ecuación $Ax = b$, puede ser resuelta por un simple proceso de substitución hacia adelante, como se muestra en la ecuación A.2.

$$A = \begin{pmatrix} B_{11} & & & & & \\ B_{21} & B_{22} & & & & \\ B_{31} & B_{32} & B_{33} & & & \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & & \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \\ B_{N1} & B_{N2} & B_{N3} & \cdot & \cdot & B_{NN} \end{pmatrix} \tag{A.1}$$

$$B_{ii}\ x_i = b_i - \sum_{j=1}^{i-1} B_{ij}\ x_j, \qquad i = 1, 2, ..., N \tag{A.2}$$

De esta forma, sólo es necesario factorizar los bloques B_{ii}, operación que puede ser realizada en paralelo, con la propiedad de que el llenado quedará confinado en cada bloque. Sin embargo, como se desprende de la ecuación A.1 y al contrario que en el caso de matrices diagonales por bloques, la etapa de resolución triangular debe ser resuelta secuencialmente. Es decir, no podemos resolver $B_{ii}x_i$ hasta que tengamos todas las $x_j,\ j = 1, 2, ..., i-1$.

Si partimos de una matriz tridiagonal por bloques como la de la figura 3.1 (b), en principio, puede parecer que los bloques superior y a la izquierda de cada bloque diagonal con elementos distintos de cero, implican una dependencia entre bloques diagonales que impide la factorización en paralelo. Sin embargo podemos trasladar esa dependencia a la etapa de de resolución triangular, de forma que sólo necesitemos factorizar cada uno de los bloques diagonales, sin dependencias entre ellos, realizando, por contra, la etapa de resolución triangular en secuencial.

Para ello, factorizaremos la matriz A de la siguiente forma:

$$\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & & & \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} & & \\ & A_{32} & A_{33} & \cdot & \\ & & \cdot & \cdot & \cdot \\ & & & \cdot & A_{NN} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I & & & \\ A_{21}D_1^{-1} & I & & \\ & \cdot & \cdot & \\ & & \cdot & \cdot \\ & & \cdot & I \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} D_1 & A_{12} & & & \\ & D_2 & A_{23} & & \\ & & D_3 & \cdot & \\ & & & \cdot & \cdot \\ & & & & D_N \end{pmatrix}$$

donde

$$D_1 = A_{11} \tag{A.3}$$
$$D_i = A_{ii} - A_{i,i-1}D_{i-1}^{-1}A_{i-1,i}, \qquad i = 2, ..., N \tag{A.4}$$

Mediante esta factorización podemos resolver el conjunto de ecuaciones $Ax = b$ mediante una sustitución hacia adelante:

$$y_1 = b_1 \tag{A.5}$$
$$y_i = b_i - A_{i,i-1}D_{i-1}^{-1}y_{i-1}, \qquad i = 2, ..., N \tag{A.6}$$

seguida de una substitución hacia atrás:

$$x_N = D_N^{-1}y_n \tag{A.7}$$
$$x_i = D_i^{-1}(y_i - A_{i,i+1}y_{i+1}), \qquad i = N-1, ..., 1 \tag{A.8}$$

Por tanto, es suficiente con mantener los bloques no diagonales de A sin modificar, y factorizar los bloques diagonales, D_i de forma:

$$D_i = L_iU_i, \qquad i = 1, ..., N,$$

operación que podemos realizar totalmente en paralelo. Sin embargo, como se aprecia en las ecuaciones A.6 y A.8, las substituciones hacia adelante y hacia atrás deberán ejecutarse secuencialmente. Por último, hacer notar que estas ecuaciones (de la A.4 a la A.8) se pueden generalizar también al caso en que la matriz sea en banda o banda variable por bloques, es decir, tengamos otros bloques con elementos no nulos fuera de la diagonal, aparte de los mencionados.

Finalmente, las matrices por bloques con borde, como las de las figuras 3.1 (d) y (e), pueden seguir el mismo tratamiento que las anteriores, salvo por el último bloque (el borde). Por tanto, es posible factorizar en paralelo todos los bloques diagonales excepto el último, que será procesado una vez todos los anteriores estén factorizados.